
Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Es sei $Z := \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \mathbb{S}^1, z \in (-1, 1)\}$. Berechnen Sie

$$\int_Z x^2 d\mu_Z(x, y, z).$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{S}^2} x^2 y^2 z^2 d\mu_{\mathbb{S}^2}(x, y, z).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ und $r(x) := x^{-\alpha}$ für $x \geq 1$. Zeigen Sie, dass der Rotationskörper $\{(x, y, z) \in [1, \infty) \times \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \leq (r(x))^2\}$ ein endliches Volumen, aber eine unendliche Oberfläche hat.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Man berechne die Fläche des Rotationsellipsoids

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Man finde die Darstellung des Laplace-Beltrami Operators bezüglich

(a) der Parametrisierung

$$(0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, (\alpha, \beta) \mapsto ((2 + \cos \alpha) \cos \beta, (2 + \cos \alpha) \sin \beta, \sin \alpha).$$

des 2-Torus T^2 .

(b) der Parametrisierung $U \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto (x, f(x))$ des Graphen von $f \in C^1(U)$, falls U in \mathbb{R}^2 offen ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 4.2.13 bis 12:00.